Râul Alb

Iunie 2016

Tabăra de MATE şi NU NUMAI

PROBLEME DE NUMĂRARE- probleme pentru clasele V / VI

prof. Camelia Pîrvu
Oraviţa, CS

Cuprins:

1. FOLOSIREA UNUI CONTOR DE NUMĂRARE

Ori de câte ori se cere a determina câte numere verifică o anumită proprietate dată, vom căuta un indice de numărare căruia îi atribuim valori numere naturale consecutive.

Exemplu

Problema 1.

Se consideră tabloul:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2\quad 3 \\ 4\quad 5\quad 6 \\ 7\quad 8\quad 9\quad 10 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

a) Cu ce număr începe al 100-lea rând?
b) Care este suma numerelor din rândul 100?
c) În al câtălea rând se află numărul 100?

Soluţie:

a) Ultimul număr al fiecărei linii: 1; 3=1+2; 6=(1+2)+3; 10=(1+2+3)+4 etc.
Linia n: $\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + ... + n.$ Al 100-lea rând începe cu 4051.

b) Rândul 100 se termină cu 5050.
S= 4951+4952+…+5050= (4950+1)+(4950+2)+…+(4950+100) =500050.

c) $\frac{13 \cdot 14}{2} \langle 100 \langle \frac{14 \cdot 15}{2}$. Numărul 100 se află pe a 14-a linie.

Problema 2.

Câte numere pare sunt de la 2^{1000} la 2^{2000} ?

Soluţie:

$2^{1000}=2^{1000}+0=2^{1000} + 2\cdot 0$
$2^{1000}+ 2 = 2^{1000} + 2\cdot 1$
$2^{1000}+ 4 = 2^{1000}+ 2 \cdot 2$
………………………
$2^{2000} = 2^{1000} + 2\cdot x$

Se determină x; $2\cdot x= 2^{2000}- 2^{1000}$ => $x= 2^{1999}- 2^{999}$=> $x = 2^{999}(2^{1000}- 1)$. Contorul de numărare ia valori de la 0 la $2^{999}(2^{1000}- 1)$. Prin urmare sunt $2^{1999}- 2^{999}+1$ numere pare.

Problema 3. Fie şirul de fracţii: $\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{2}{2};\frac{2}{1};\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{3}{3};\frac{3}{2};\frac{3}{1};...;\frac{1}{n};\frac{2}{n};...;\frac{n}{n};\frac{n}{n-1};\frac{n}{n-2};...;\frac{n}{1}$ unde $n \in \mathbb{N}^*$

a) Dacă n= 2009, aflaţi numărul fracţiilor din şir.
b) Arătaţi că, pentru orice număr natural nenul, numărul fracţiilor din şir este un pătrat perfect

(G.M nr. 3/2009)

Soluţie: a) pentru n= 2009, numărul fracţiilor este

$1+3+5+...+x$, de unde deduce $(2\cdot1-1)+(2\cdot2-1)+(2\cdot3-1)+...+(2\cdot2009-1)=2009^2$

b) 1+3+5+……..+(2n-1) = n^2; pentru orice n numar natural.

Problema 4.

Fie şirul de numere $(a_n)_{n\geq1}$: 22, 23, 25, 28, 32,……. Să se determine al 2016-lea număr al şirului.

Soluţie: a_1 =22

a_2 = 23=22+1=a_1+ 1

a_3 = 25=23+2=22+1+2= a_1+1+2

a_4 = 28=25+3=22+1+2+3= a_1 +1+2+3

………………………

a_{2016} = a_{2015} + 2015 = a_1+1+ 2+3+…+2015 = ...

2. REGULA SUMEI:

Dacă un anumit obiect A poate fi ales în m moduri, iar un alt obiect poate fi ales în n moduri, atunci alegerea lui „A sau B" poate fi realizata în m+n moduri (trebuie avut în vedere ca nici o alegere a lui A să nu coincidă cu nici o alegere a lui B). Dacă totuşi există astfel de coincidenţe (în număr de k), atunci regula sumei de mai sus dă „m+n-k" moduri de alegere a lui „A sau B" .

Problema 5. Cu câte zerouri se termină numărul $N = 1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot2016$, notat și 2016!, numit 2016 factorial. Ce exponent are 2 în descompunerea în factori primi a lui N ?

Indicaţie:

Numărul de zerouri este egal cu exponentul lui 5 din descompunerea în factori primi a lui N. Multipli de 5 sunt: 5,10,15,...,2015, deci 403 numere.

Multipli de 25 sunt: 25, 50, 75,...,2000, deci 80 numere.

Multipli de 125 sunt în număr de 16, sunt 3 multiplii de 625 .

În total 5 apare de 502 de ori ca factor în N. Cum numere pare sunt 1008, N se termină cu 502 de zerouri.

În şirul 1,2,...,2016 avem 1008 de numere pare, 504 de multipli de 4, 252 multipli de 8, 126 multipli de 16, 63 multipli de 32, 31 multipli de 64, 15 multipli de 128, 7 multipli de 256, 3 multipli de 512, 1 multiplu de 1024, deci 2 apare cu exponentul 2010.

3. REGULA PRODUSULUI:

Dacă un obiect A se poate alege în „ m" moduri şi dacă după fiecare astfel de alegere, un obiect B se poate alege în „n" moduri, atunci alegerea perechii (A,B) în acestă ordine poate fi realizată în „m·n" moduri. Dacă un obiect A se poate alege în „ m" moduri şi dacă după fiecare astfel de alegere, un obiect B se poate alege în „n" moduri,un obiect C se poate alege în „p" moduri, atunci alegerea tripletul (A,B,C) se poate face în „m·n·p" moduri.

Problema 6.

Să se determine câte numere (scrise în baza 10) de câte 4 cifre se pot forma, folosind numai cifrele 0, 2, 4 si 6.

Soluţie:.Un astfel de număr este de forma $\overline{abcd}$; pentru cifra a avem 3 posibilităţi de alegere: 2, 4 şi 6 iar pentru oricare din celelalte 3 cifre avem câte 4 posibilităţi de alegere. Folosind regula produsului, obţinem $3\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = 192$ de numere.

Problema 7.

Un număr natural se numeşte *palindrom* dacă el coincide cu răsturnatul său (exemplu 525 sau 41714). Câte numere palindrom de 5 cifre există?

Soluţie: Evident, e suficient să alegem primele 3 cifre (celelalte coincid cu a doua, respectiv cu prima). Alegerea se poate face în 9 moduri pentru prima cifra (fără 0), apoi în câte 10 moduri pentru următoarele două. Cu regula produsului obţinem $9\cdot 10\cdot 10 = 900$ numere.

4. PRINCIPIUL INCLUDERII ŞI EXCLUDERII

Fie A, B, C multimi finite . Cardinalul multimilor A U B, A U B U C este dat de relatiile:

a) **card(A U B) = card(A) +card (B)- card (A∩B)**

b) **card(A U B U C)=card(A)+card(B)+card(C)-card(A∩B)-card(A∩C)-card(B∩C)+card(A∩B∩C).**

(cazuri particulare ale formulei Boole- Silvester).

Problema 8.

Elevii unei clase joacă fotbal sau baschet: 19 joacă fotbal, 24 joacă baschet şi 16 practică ambele jocuri.Câţi elevi sunt în clasă?

Soluţie: Aplicăm principiul includerii şi excluderii:

Card (F U B)= cardF+ cardB- card(F ∩ B)=19+24-16=27 . Deci numărul elevilor din clasa este 27.

Principiul includerii şi excluderii permite rezolvarea simplă a unor probleme de divizibilitate.

Problema 9.

Aflaţi numărul numerelor naturale mai mici sau egale cu 500 care sunt divizibile cu 2, 3 sau 5.

Soluţei: Fie A mulţimea numerelor naturale mai mici sau egale cu 500 care sunt divizibile cu 2, B mulţimea celor divizibile cu 3 şi C mulţimea numerelor divizibile cu 5. Vom folosi partea întreagă pentru că ne intereseaza numai câturile. Atunci

cardA =[500/2] = 250, cardB = [500/3] = 166 , cardC=[500/5]=100, card(A∩B)=[500/6] , card(B∩C)=[500/15] =33 , card(A∩C)=[500/10]=50 , card(A∩B∩C)=[500/30]= 16.

Avem card(AUBUC)=250+166+100-83-33-50+16 = 366 . Acum putem afla şi numărul numerelor naturale mai mici sau egale cu 500 care nu sunt divizibile cu 2, nici cu 3, nici cu 5. Acestea sunt în număr de 500-366=134.

5. NUMĂRUL DIVIZORILOR UNUI NUMĂR NATURAL

Fie a un număr natural compus ce are următoarea descompunere în factori primi :

$$a= p_1^{\alpha 1} \cdot p_2^{\alpha 2} \cdot .....p_n^{\alpha n} ,$$

unde p_1 ,p_2 ,……p_n sunt numere prime iar $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n \in \mathbb{N}$ (forma canonică a lui a).
Pentru a obţine numărul divizorilor lui a, formăm tabelul :

p_1^0 p_1^2 p_1^2 p_1^3 ……………$p_1^{\alpha 1}$ α_1 +1 termeni
p_2^0 p_2^1 p_2^2 p_2^3 ……………$p_2^{\alpha 2}$ α_2+ 1 termeni
…………………………………………………………………………..
p_n^0 p_n^1 p_n^2 p_n^3 ……………$p_n^{\alpha n}$ α_n +1 termeni

Un divizor oarecare se formează înmulţind un număr din prima linie, cu un număr din a doua linie şi aşa mai departe până la ultima linie. Numărul din prima linie se poate alege în (α_1 + 1) moduri, cel de-al doilea număr în (α_2 + 1) moduri ş.a,.m.d. În acest mod putem forma (α_1+1)(α_2+1)……...(α_n+1) divizori.

Teoremă: *Numărul divizorilor numărului* $a= p_1^{\alpha 1} \cdot p_2^{\alpha 2} \cdot ....p_n^{\alpha n}$ *este*

$$d(a)= (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)....(\alpha_n + 1).$$

Pentru n numar natural, vom nota cu **d(a)-** numărul divizorilor naturali ai lui a.

Problema 11.

Determinaţi numărul divizorilor lui 2016.

Problema 12.

Câţi divizori în mulţimea numerelor naturale are numarul $2^{10} \cdot 5^9 +2 \cdot 5^{8.}$

Soluţie: Numărul dat se poate scrie $2^9 \cdot 5^8 \cdot 11$. Rezultă (9+1)(8+1)(1+1)=180 divizori.

Problema 13.

Determinaţi toate numerele de forma $a= 2^m \cdot 3^n$, unde m şi n sunt numere naturale care au exact 8 divizori.

Soluţie: (m+1)(n+1)=8; rezultă numerele 3^7, 54, 24, $2^{7.}$

Problema 14.

Să se determine toate numerele scrise în baza 10 care sunt divizibile cu 15 şi au 14 divizori.

Soluţie: $15|A \Rightarrow A= 3^x \cdot 5^y \cdot p_1^{k1} \cdot p_2^{k2}$ …..; $x,y \neq 0$.

$$d(A)=(x+1)(y+1)(k_1 + 1)(k_2 +1)\ldots$$

Cum $x+1 \neq 1$ si $y +1 \neq 1 \Rightarrow x+1=2$ si $y+1 =7$ sau $x+1=7$ şi $y+1=2$. Deci x=1 şi y=6 sau x=6 şi y=1. Numerele care satisfac condiţia problemei sunt $A= 3\cdot 5^6$ sau $A=3^6\cdot 5$.

5.1. SUMA DIVIZORILOR UNUI NUMĂR NATURAL (d(a)).

Să calculăm mai întâi suma S =1+x+x^2 +…………………..x^n.

Se ştie că $S=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$;cu x≠1.

Scriem produsul de n sume avand termenii pe cele n linii din table şi obţinem

$$\left(1+p_1+p_1^2+...+p_1^{\alpha_1}\right)\left(1+p_2+p_2^2+...+p_2^{\alpha_1}\right)...\left(1+p_n+p_n^2+...+p_n^{\alpha_1}\right)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot...\cdot\frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}$$

Un astfel de produs se efectuează înmulţind în toate modurile posibile câte un termen din fiecare paranteză, în felul acesta se formează toţi divizorii numărului a.

Am obţinut astfel **teorema** :

suma divizorilor numărului a=$p_1^{\alpha 1}\cdot p_2^{\alpha 2}\cdot$…….$p_n^{\alpha n}$ este

$$S=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot...\cdot\frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}$$

Problema 15.

Fie S suma divizorilor naturali ai nr 2016. Să se arate că S este un număr natural divizibil cu 31.

Soluţie:

$2016=2^5\cdot3^2\cdot7$ de unde $S=\dfrac{2^6-1}{2-1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3-1}\cdot\dfrac{7^2-1}{7-1}=\dfrac{31}{1}\cdot\dfrac{26}{2}\cdot\dfrac{48}{6}=31\cdot13\cdot7$

5.2. PRODUSUL DIVIZORILOR UNUI NUMĂR NATURAL (p(a)).

Dacă d_1 ,d_2,…..d_k sunt toţi divizorii naturali ai numarului a atunci avem relaţia :

$$\left(d_1\cdot d_2\cdot...\cdot d_k\right)^2=a^k$$

Soluţie:

Considerăm $d_1<d_2<\ldots<d_k$ şi obţinem

$a=d_1\cdot d_k\Rightarrow d_1=\dfrac{a}{d_k};a=d_2\cdot d_{k-1}\Rightarrow d_2=\dfrac{a}{d_{k-1}};...a=d_1\cdot d_k\Rightarrow d_K=\dfrac{a}{d_1}$,

relaţii care înmulţite membru cu membru dau

$$a=d_1\cdot d_k\Rightarrow d_1=\frac{a}{d_k};a=d_2\cdot d_{k-1}\Rightarrow d_2=\frac{a}{d_{k-1}};...a=d_1\cdot d_k\Rightarrow d_K=\frac{a}{d_1}$$

$$d_1\cdot d_2\cdot...\cdot d_k=\frac{a}{d_k}\cdot\frac{a}{d_{k-1}}\cdot...\cdot\frac{a}{d_1}\Rightarrow\left(d_1\cdot d_2\cdot...\cdot d_k\right)^2=a^k$$

Problema 16.

Să se calculeze produsul tuturor divizorilor naturali ai numărului 2016.

Soluţie: $2016=2^5\cdot3^2\cdot7$, iar numărul divizorilor este (5+1)(3+1)(1+1)=48;

Rezultă relaţia: $\left(d_1\cdot d_2\cdot...\cdot d_{48}\right)^2=2016^{48}\Rightarrow d_1\cdot d_2\cdot...\cdot d_{48}=2016^{24}$

PROBLEME PROPUSE:

1) Se consideră următorul tablou de numere:

$$\begin{array}{cccc} & & 7 & \\ & 14 & 21 & \\ 28 & 35 & 42 & \\ 49 & 56 & 63 & 70 \\ & \ldots & & \end{array}$$

a) Cu ce număr începe al 20-lea rând ?

b) Pe ce rând se află numărul 2009 ?

c) Al câtălea este 2009 pe rândul respectiv ?

(The Clock-Tower School - **Juniors II, Rm. Vâlcea 2009)**

Indicaţie:

$7=7\cdot1$; $21=7\cdot3=7\cdot(1+2)$; $42=7\cdot6=7\cdot(1+2+3)$

2) a) Determinaţi termenul al 7-lea din şirul 2x+1,2x+5,2x+9,…..2x+37,…….dacă suma $(2x+1)+(2x+5)+(2x+9)+\ldots+(2x+37) = 210$.

b) Pentru valoarea x găsită anterior precizaţi al câtelea termen în şir este numărul 3643.

Indicaţie:

$a_1 = 2x+1 = 2x+4\cdot0+1$
$a_2 = 2x+5 = 2x+4\cdot1+1$
...
$a_n = 2x+1 = 2x+4\cdot(n-1)+1$

3) Să se determine numerele naturale m şi n ştiind că numărul $2^m\cdot5^n$ are cu 6 divizori mai mult decât numărul 3^n.

Indicaţie:

Numărul divizorilor lui $2^m\cdot5^n$ este $(m+1)(n+1)$ iar cei ai numărului 3^n este $(n+1)$.

4) Determinaţi câţi dintre divizorii numărului 2016^{10} sunt multipli al lui 126^8.

(SGM 9/2015)

Soluţie: $2016^{10} = 2^{50}\cdot3^{20}\cdot7^{10}$ şi $126^8 = 2^8\cdot3^{16}\cdot7^8$. Căutăm multiplii de forma $2^a, 8\le a\le 50$; $3^b, 16\le b\le 20$ şi $7^c, 8\le c\le 10$ precum şi produsele acestora. Aplicând regula produsului obţinem cerinţa.

EVALUARE

PROBLEME DE NUMĂRARE – 29 iunie 2016

Arătaţi că fracţia $\dfrac{2015!}{2016^{333}}$ este număr natural. Prin $2015!$ s-a notat produsul $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2014\cdot2015$.

Determinaţi numărul natural n care admite exact 4 divizori naturali, ştiind că produsul divizorilor este 2601.

(SGM 4/2016)